



TITLE:

SL\$\_2\$ の被覆群の跡公式とその応用 (保型形式と関連する跡公式, ゼータ関数の研究)

AUTHOR(S):

池田, 保; 平賀, 郁

---

CITATION:

池田, 保 ...[et al]. SL\$\_2\$ の被覆群の跡公式とその応用 (保型形式と関連する跡公式, ゼータ関数の研究). 数理解析研究所講究録 2011, 1767: 115-124

ISSUE DATE:

2011-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171442>

RIGHT:

## SL<sub>2</sub> の被覆群の跡公式とその応用

京都大学大学院理学研究科 池田保  
京都大学大学院理学研究科 平賀郁

### 1 SL<sub>2</sub> の被覆群の跡公式の安定化

講演では SL<sub>2</sub> の偶数次の被覆群の跡公式の安定化と、その応用として Hilbert modular form に対する Kohnen plus space の理論への応用について述べた。講演の時点では Kohnen plus space は基礎体の判別式が奇数の場合にしか構成されていなかったが、その後の研究によりこの条件は外すことができたので、この講究録では一般的な形で述べることにする。

まず、移行因子 (transfer factor) を定義し、その性質について述べる。移行因子  $\delta_{\psi}^+(\tilde{h}, g)$  の定義は Adams, Schultz, Trehan らによる。

$F$  を局所体,  $n$  を偶数とする。  $F$  は 1 の原始  $n$  乗根をもつものとする。  $F$  における 1 の  $n$  乗根のなす群を  $\mu_n$  で表す。  $\mu_n$  の  $\mathbb{C}^{\times}$  への埋め込みを一つ取って固定し、以後  $\mu_n \subset \mathbb{C}^{\times}$  とみなす。

$F$  の非自明な加法的指標  $\psi : F \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$  を一つ取って固定する。  $\phi \in \mathcal{S}(F)$  を  $F$  上の Schwartz 函数とすると、  $\phi$  の Fourier 変換  $\hat{\phi}$  は

$$\hat{\phi}(x) = \int_F \phi(y) \psi(xy) dy$$

により定義される。ここで Haar 測度  $dy$  は Plancherel の公式  $\int_F |\phi(x)|^2 dx = \int_F |\hat{\phi}(x)|^2 dx$  が成り立つように正規化されているとする。  $a \in F^{\times}$  とするとき、任意の  $\phi \in \mathcal{S}(k)$  に対して

$$\int_F \phi(x) \psi(ax^2) dx = \alpha_{\psi}(a) |2a|^{-1/2} \int_F \hat{\phi}(x) \psi(-\frac{x^2}{4a}) dx$$

が成り立つような定数  $\alpha(a) = \alpha_{\psi}(a)$  が存在する。これを  $\psi$  により定まる  $a$  の Weil 定数という。Weil 定数  $\alpha_{\psi}(a)$  は次の等式を満たす。

$$\begin{aligned} \alpha_{\psi}(ab^2) &= \alpha_{\psi}(a), \\ \alpha_{\psi}(-a) &= \overline{\alpha_{\psi}(a)}, \\ \alpha_{\psi}(a)^8 &= 1, \\ \frac{\alpha_{\psi}(a)\alpha_{\psi}(b)}{\alpha_{\psi}(1)\alpha_{\psi}(ab)} &= \langle a, b \rangle_2, \quad (a, b \in F^{\times}). \end{aligned}$$

ここで  $\langle, \rangle_2$  は  $F$  上の 2 次の Hilbert 記号である。

SL<sub>2</sub>( $F$ ) の Kubota 2-cocycle  $c(g_1, g_2)$  は次式で定義される。

$$c(g_1, g_2) = \left\langle \frac{x(g_1)}{x(g_1g_2)}, \frac{x(g_2)}{x(g_1g_2)} \right\rangle_n,$$

$$\mathbf{x} \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} c & \text{if } c \neq 0, \\ d & \text{if } c = 0. \end{cases}$$

ここで  $\langle, \rangle_n$  は  $F$  上の  $n$  次の Hilbert 記号である. Metaplectic 群  $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$  は Kubota 2-cocycle  $\mathbf{c}(g_1, g_2)$  で定義される  $\mathrm{SL}_2(F)$  の  $n$  重被覆群である. すなわち  $\mathrm{SL}_2(F)$  の元は組  $[g, \zeta]$ , ( $g \in \mathrm{SL}_2(F)$ ,  $\zeta \in \mu_n$ ) からなり, それらの積は  $[g_1, \zeta_1] \cdot [g_2, \zeta_2] = [g_1 g_2, \mathbf{c}(g_1, g_2) \zeta_1 \zeta_2]$  で与えられる. 簡明のため,  $[g, 1]$  を単に  $[g]$  で表すことがある.  $H$  を  $\mathrm{SL}_2(F)$  の部分集合とすると,  $H$  の  $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$  における逆像を  $\tilde{H}$  で表す.

$\mathrm{SL}_2(F)$  の正則半単純な元  $h_1, h_2$  が安定的に共役であるとは  $h_1 = gh_2g^{-1}$  を満たす  $g \in \mathrm{GL}_2(F)$  が存在することである.  $\mathrm{GL}_2(F)$  から  $\mathrm{SL}_2(F)$  への写像  $\tau^+, \tau^-$  を

$$\tau^+(g) = (\det g)^{-n/2} g^n, \quad \tau^-(g) = -(\det g)^{-n/2} g^n$$

により定義する.  $\tau^+, \tau^-$  が誘導する  $\mathrm{PGL}_2(F)$  から  $\mathrm{SL}_2(F)$  への写像も同じ記号で表す.  $\mathrm{PGL}_2(F)$  の元  $g$  が  $\tau$ -正則であるとは  $\tau^+(g)$  が正則であることとする. 正則半単純な元  $[h, \zeta] \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$  と  $\tau$ -正則半単純な元  $g \in \mathrm{PGL}_2(F)$  に対して, 移行因子  $\delta_\psi^+([h, \zeta], g)$  を次のように定義する (cf. [1], [10]). まず,  $h \in \mathrm{SL}_2(F)$  と  $\tau^+(g)$  が安定的に共役でない場合は,  $\delta_\psi^+([h, \zeta], g) = 0$  とおく.  $h \in \mathrm{SL}_2(F)$  と  $\tau^+(g)$  が安定的に共役の場合は

$$\delta_\psi^+([h, \zeta], g) = \begin{cases} \zeta \frac{\alpha_\psi(1)}{\alpha_\psi(\det g)} \langle \det g, -\mathbf{x}(h) \rangle_2 & \text{if } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \zeta \langle \det g, \mathbf{x}(h) \rangle_2 & \text{if } n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

によって移行因子  $\delta_\psi^+([h, \zeta], g)$  を定義する. また, もう一つの移行因子  $\delta_\psi^-(\tilde{h}, g)$  を

$$\delta_\psi^-(\tilde{h}, g) = \alpha_\psi(1)^{-2} \delta_\psi^+([-1_2]\tilde{h}, g)$$

によって定義する. このとき, これらの移行因子について次の補題が成り立つ.

**補題 1.**  $g, g' \in \mathrm{PGL}_2(F)$ ,  $\tilde{h}, \tilde{h}' \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ ,  $\varepsilon \in \{+, -\}$  とする. このとき, 次の (1), (2), (3) が成り立つ.

- (1)  $\delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}, g)$  は  $\tilde{h}$  に関して genuine な関数である. すなわち  $\delta_\psi^\varepsilon([h, \zeta], g) = \zeta \delta_\psi^\varepsilon([h], g)$ .
- (2)  $g$  と  $g'$  が  $\mathrm{PGL}_2(F)$  において共役ならば  $\delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}, g) = \delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}, g')$ .
- (3)  $\tilde{h}$  と  $\tilde{h}'$  が  $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$  において共役ならば  $\delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}, g) = \delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}', g)$ .

**補題 2.**  $g, g' \in \mathrm{PGL}_2(F)$ ,  $h, h' \in \mathrm{SL}_2(F)$ ,  $\varepsilon, \varepsilon' \in \{+, -\}$  とする. 次の (1), (2), (3), (4) が成り立っているとする.

- (1)  $\tau^\varepsilon(g) = h$  かつ  $\tau^{\varepsilon'}(g') = h'$ .
- (2)  $h$  と  $h'$  は楕円的である.
- (3)  $h$  と  $h'$  は安定的に共役である.
- (4)  $g$  と  $g'$  は共役ではない.

このとき、次が成り立つ.

$$\frac{\delta_{\psi}^{\varepsilon'}([h], g')}{\delta_{\psi}^{\varepsilon}([h], g)} = -\frac{\delta_{\psi}^{\varepsilon'}([h'], g')}{\delta_{\psi}^{\varepsilon}([h'], g)}.$$

$\widetilde{C_0(\mathrm{SL}_2(F))}$  を  $\mathrm{SL}_2(F)$  上の support が compact で anti-genuine かつ滑らかな函数全体のなす空間とする. ただし  $\tilde{\varphi}$  が anti-genuine とは  $\tilde{\varphi}([h, \zeta]) = \zeta^{-1} \tilde{\varphi}([h])$  が成り立つことである. また,  $C_0(\mathrm{PGL}_2(F))$  を  $\mathrm{PGL}_2(F)$  上の support が compact で滑らかな函数全体のなす空間とする.  $\tilde{h} = [h, \zeta] \in \mathrm{SL}_2(F)$ ,  $g \in \mathrm{PGL}_2(F)$ ,  $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C_0(\mathrm{SL}_2(F))}$ ,  $\varphi \in C_0(\mathrm{PGL}_2(F))$  に対して軌道積分

$$I(\tilde{h}, \tilde{\varphi}) = \Delta(h) \int_{Z_{\mathrm{SL}_2}(\tilde{h}) \backslash \mathrm{SL}_2} \tilde{\varphi}(\tilde{x}^{-1} \tilde{h} \tilde{x}) d\tilde{x},$$

$$I(g, \varphi) = \Delta(g) \int_{Z_{\mathrm{PGL}_2}(g) \backslash \mathrm{PGL}_2} \varphi(x^{-1} g x) dx,$$

を考える.

$\varepsilon \in \{+, -\}$  とするとき,  $\varphi^{\varepsilon} \in C_0(\mathrm{PGL}_2(F))$  が移行因子  $\delta_{\psi}^{\varepsilon}$  に関する  $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C_0(\mathrm{SL}_2(F))}$  の移行 (transfer) であるとは,  $g \in \mathrm{PGL}_2(F)$  で  $\tau^{\varepsilon}(g)$  が正則半単純ならば

$$\sum_h \delta_{\psi}^{\varepsilon}([h], g) I([h], \tilde{\varphi}) = I(g, \varphi^{\varepsilon})$$

が成り立つことをいう. ここで  $h$  は  $\mathrm{SL}_2(F)$  の正則半単純な共役類を走るものとする. 任意の anti-genuine な函数  $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C_0^{\infty}(\mathrm{SL}_2(F))}$  に対して, 移行因子  $\delta_{\psi}^{\varepsilon}$  に関する移行  $\varphi^{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\mathrm{PGL}_2(F))$  が存在することが知られている. また,  $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C_0(\mathrm{SL}_2)}$  が  $\tilde{\varphi}([-1_2] \tilde{h}) = \alpha(1)^2 \tilde{\varphi}(\tilde{h})$  を満たすときには  $\delta_{\psi}^{+}$  に関する移行と  $\delta_{\psi}^{-}$  に関する移行は同じものになる. このときは単に  $\tilde{\varphi}$  の移行という.

$F$  が非アルキメデス的であり,  $\psi$  はオーダー 0 であるとする. また  $n \in \mathfrak{o}^{\times}$  と仮定する. このとき, 被覆  $\mathrm{SL}_2(F) \rightarrow \mathrm{SL}_2(F)$  は極大コンパクト部分群  $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$  上で一意的に分裂する. この分裂により  $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$  を  $\mathrm{SL}_2(F)$  の部分群とみなすことにする.  $\mathcal{H}(\mathrm{PGL}_2(F) // \mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o}))$  を  $(\mathrm{PGL}_2(F), \mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o}))$  に関する Hecke 環とし,  $\widetilde{\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(F) // \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))}$  を  $(\mathrm{SL}_2(F), \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))$  に関する anti-genuine なテスト関数からなる Hecke 環とする. このとき, 標準的な同型写像

$$i_v : \mathcal{H}(\mathrm{PGL}_2(F) // \mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o})) \simeq \widetilde{\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(F) // \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))}$$

で移行を保存するものが存在する.  $\varphi \in \mathcal{H}(\mathrm{PGL}_2(F) // \mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o}))$  とするとき,  $\varphi$  は  $i_v(\varphi) \in \widetilde{\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(F) // \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))}$  の移行である.

$F$  を 1 の原始  $n$  乗根を含む代数体とする.  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$  を  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$  の  $n$  重被覆群とする.  $C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$  を  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$  上のサポートが compact で滑らかな函数全体のなす空間とする.  $g = (g_v) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ ,  $\varphi = \prod_v \varphi_v \in C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$  とするとき, 軌道積分  $I(g, \varphi)$  を

$$I(g, \varphi) := \prod_v I(g_v, \varphi_v)$$

によって定義する. 同様に,  $\widetilde{C_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}))}$  を  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$  上のサポートが compact で滑らかな anti-genuine な函数全体のなす空間とする.  $h = (h_v) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ ,  $\tilde{\varphi} = \prod_v \tilde{\varphi}_v \in \widetilde{C_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}))}$

に対して軌道積分  $I(h, \tilde{\varphi})$  を

$$I(h, \tilde{\varphi}) := \prod_v I(h_v, \tilde{\varphi}_v)$$

によって定義する.  $\varphi^e = \prod_v \varphi_v^e \in C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$ ,  $\tilde{\varphi} = \prod_v \tilde{\varphi}_v \in \widetilde{C_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}))}$  とする. すべての  $v$  について  $\varphi_v^e$  が  $\tilde{\varphi}_v$  の  $\delta_{\psi_v}^e$  に関する移行であるとき,  $\varphi^e$  は  $\tilde{\varphi}$  の  $\delta_{\psi}^e$  に関する移行であるという.

**定理 1.**  $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$  を  $\tilde{\varphi}$  のそれぞれ  $\delta_{\psi}^+$ ,  $\delta_{\psi}^-$  に関する移行とすると,

$$2 \sum_{\substack{h \in \mathrm{SL}_2(F)/\sim \\ h: \text{正則楕円の}}} I(h, \tilde{\varphi}) = \sum_{\substack{g \in \mathrm{PGL}_2(F)/\sim \\ g: \tau\text{-正則楕円の}}} (I(g, \varphi^+) + I(g, \varphi^-))$$

が成り立つ.

定理 1 は  $\widetilde{\mathrm{SL}_2}$  の跡公式の楕円項の安定化を与えている.

## 2 Kohnen plus space の理論への応用

安定跡公式の応用として, Kohnen plus space の理論の Hilbert modular form への一般化を考察する. この節では  $n = 2$  とし, 被覆群は 2 重被覆群のみを考える. Hilbert symbol  $\langle, \rangle$  も 2 次のもののみを考える. まず最初に一変数の保型形式に関する Kohnen plus space の理論を復習する.  $\Gamma_0(4) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  に関する重さ  $1/2$  の保型因子  $j^{1/2}(\gamma, z)$  は

$$j^{1/2}(\gamma, z) = \left(\frac{c}{d}\right) \epsilon_d^{-1} (cz + d)^{1/2}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4), z \in \mathfrak{h},$$

$$\epsilon_d = \begin{cases} 1, & \text{if } d \equiv 1 \pmod{4}, \\ \sqrt{-1}, & \text{if } d \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

により定義される.  $k \geq 2$  を正整数とすると  $j^{k+(1/2)}(\gamma, z) = (j^{1/2}(\gamma, z))^{2k+1}$  とおく. この保型因子に関する  $\Gamma_0(4)$  の正則尖点形式の空間を  $S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4))$  で表す. この尖点形式の空間の Kohnen plus subspace は次のように定義される.

$$S_{k+(1/2)}^+(\Gamma_0(4)) = \left\{ h(z) \in S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4)) \mid h(\tau) = \sum_{(-1)^k n \equiv 0, 1(4)} c(n) q^n \right\}$$

このとき, Kohnen は以下のような結果を証明した.

**定理 (Kohnen)** Hecke 環上の加群として (標準的ではない) 同型

$$S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \simeq S_{k+(1/2)}^+(\Gamma_0(4)).$$

が存在する.  $S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4))$  上の Hecke 作用素  $U$ ,  $W$  を以下のように定義する.

$$Uh(z) = \frac{1}{4} \sum_{i \pmod{4}} h\left(\frac{z+i}{4}\right),$$

$$Wh(z) = (-2\sqrt{-1}z)^{-k-(1/2)} h\left(-\frac{1}{4z}\right).$$

このとき, Kohnen plus space  $S_{k+(1/2)}^+(\Gamma_0(4))$  は  $\mathbf{U}, \mathbf{W}$  を用いて以下のように特徴づけられる.

$$S_{k+(1/2)}^+(\Gamma_0(4)) = \{h \in S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4)) \mid \mathbf{WU}h = (-1)^{(k^2+k)/2} 2^k h\}.$$

$F$  を次数  $d$  の総実代数体、 $\mathbf{A}$  を  $F$  の adèle 環とする.  $\psi_1: \mathbf{A}/F \rightarrow \mathbb{C}^\times$  を  $\mathbf{A}/F$  の加法的指標で無限成分が  $x \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$  となるようなものとする.  $\mathcal{D}_F$  を  $F/\mathbb{Q}$  の共役差積とする.  $F$  の  $\mathbb{R}$  への相異なる埋め込みを  $\iota_1, \dots, \iota_d$  で表す.  $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$  を  $d$  個の整数の組で  $k_i \geq 2$ , ( $i = 1, 2, \dots, d$ ) とする.  $F$  の単数  $\eta \in \mathfrak{o}_F^\times$  で  $(-1)^{k_i \iota_i(\eta)} > 0$ , ( $i = 1, \dots, d$ ) を満たすものが存在するものと仮定する. 以下ではこのような単数  $\eta$  を一つ取って固定する.  $k_1 = \dots = k_d = k$  の場合には  $\eta = (-1)^k$  と取るものとする.  $\mathbf{A}/F$  の加法的指標  $\psi$  を  $\psi(x) = \psi_1(\eta x)$  により定義する.

$v$  を  $F$  の非アルキメデスの素点とすると、 $\mathrm{SL}_2(F_v)$  のコンパクト開部分群  $\Gamma_{0,v}(4)$  を

$$\Gamma_{0,v}(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(F_v) \mid a, d \in \mathfrak{o}_v, b \in \mathcal{D}_v^{-1}, c \in 4\mathcal{D}_v \right\}$$

によって定義する. ここで  $\mathcal{D}_v = \mathfrak{o}_{F_v} \mathcal{D}_F$  である.  $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F_v)}$  を  $\mathrm{SL}_2(F_v)$  の二重被覆群とし,  $\Gamma_{0,v}(4)$  の  $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F_v)}$  における逆像を  $\widetilde{\Gamma_{0,v}(4)}$  で表す.  $\widetilde{\Gamma_{0,v}(4)}$  の genuine な指標  $\varepsilon_v: \widetilde{\Gamma_{0,v}(4)} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  を次のように定義する.

$v \nmid 2$  のときには  $\varepsilon_v$  は  $\widetilde{\Gamma_{0,v}(4)}$  の唯一の genuine な指標とする.  $v \mid 2$  のときには

$$\varepsilon_v([g, \zeta]) = \zeta \frac{\alpha_{\psi_v}(1)}{\alpha_{\psi_v}(d)} \langle d, \mathbf{x}(g) \rangle_v, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{0,v}(4).$$

と定義する. ここで  $\alpha_{\psi_v}$  は Weil 定数である.

$j(\gamma, z) = cz + d$ , ( $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ,  $z \in \mathfrak{h}$ ) を通常の保型因子とする.  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  の二重被覆群を  $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$  とするとき,  $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \times \mathfrak{h}$  の保型因子  $\tilde{j}(\tilde{\gamma}, z)$  を

$$\tilde{j}\left(\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \zeta\right], z\right) = \begin{cases} \zeta\sqrt{d} & \text{if } c = 0, d > 0, \\ -\sqrt{-1}\zeta\sqrt{|d|} & \text{if } c = 0, d < 0, \\ \zeta(cz + d)^{1/2} & \text{if } c \neq 0. \end{cases}$$

によって定義する. ただし  $-\pi/2 < \arg((cz + d)^{1/2}) \leq \pi/2$  とする. 定義より  $\tilde{j}([\gamma, \zeta], z)^2 = j(\gamma, z)$  が成り立つ.

$\mathrm{SL}_2(F)$  の合同部分群  $\Gamma_0(4)$  を

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(F) \mid a, d \in \mathfrak{o}_F, b \in \mathcal{D}_F^{-1}, c \in 4\mathcal{D}_F \right\}$$

によって定義する.  $\Gamma_0(4) \times \mathfrak{h}^d$  の保型因子  $j^{k+(1/2)}(\gamma, z)$  を

$$j^{k+(1/2)}(\gamma, z) = \prod_{v < \infty} \varepsilon_v([\gamma]) \prod_{i=1}^d (\tilde{j}(\iota_i([\gamma]), z_i))^{2k_i+1}$$

によって定義する.  $F = \mathbb{Q}$  の場合にはこの定義は古典的な定義と一致する. この保型因子によって定まる重さ  $k + (1/2)$  の Hilbert 尖点形式の空間を  $S_{k+(1/2)}(4)$  で表す. すなわち,

$$S_{k+(1/2)}(4) = \{h : \mathfrak{h}^d \xrightarrow{\text{hol}} \mathbb{C}, \mid \\ h(\gamma(z)) = j^{k+(1/2)}(\gamma, z)h(z), \forall \gamma \in \Gamma_0(4), \quad h : \text{尖点形式}\}.$$

とおく.  $S_{k+(1/2)}(4)$  に属する尖点形式  $h(z)$  は  $F$  の整数環  $\mathfrak{o}_F$  を添数集合にもつ Fourier 展開

$$h(z) = \sum_{\xi \in \mathfrak{o}_F} c(\xi)q^\xi,$$

を持つ. ここで  $q^\xi := \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{i=1}^d (\iota_i(\xi)z_i))$  である.  $\widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{A})}$  を adèle 群  $\text{SL}_2(\mathbb{A})$  の 2 重被覆群とすると,  $S_{k+(1/2)}(4)$  の元は adèle 空間  $\text{SL}_2(F) \backslash \widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{A})}$  上の保型形式  $\varphi$  で次の性質 (1) ~ (4) を満たすものとみなすことができる.

- (1)  $v$  を有限素点とすると,  $\varphi(gk) = \varepsilon_v^{-1}(k)\varphi(g)$ , ( $g \in \widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{A})}$ ,  $k \in \Gamma_{0,v}(4)$ ).
- (2)  $\varphi$  は重さ  $k + (1/2)$  を持つ. すなわち  $k_i(\theta) = \iota_i \left( \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right)$ , ( $i = 1, 2, \dots, d$ ) とするとき,

$$\varphi(gk_i(\theta)) = \exp((k_i + (1/2))\sqrt{-1}\theta)\varphi(g), \quad (g \in \widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{A})}, -\pi < \theta \leq \pi)$$

が成り立つ.

- (3)  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, d$ ) を  $i$  番目の無限成分に対応する Casimir 作用素とすると,

$$\Delta_i \varphi = -\frac{(2k_i + 1)(2k_i - 3)}{16} \varphi$$

が成り立つ.

- (4)  $\varphi$  は尖点的である. すなわち

$$\int_{x \in F \backslash \mathbb{A}} \varphi \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx = 0, \quad (g \in \widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{A})})$$

が成り立つ.

Hilbert 尖点形式の空間  $S_{k+(1/2)}(4)$  に対する Kohnen plus space を

$$S_{k+(1/2)}^+(4) := \left\{ h(z) \in S_{k+(1/2)}(4) \mid h(\tau) = \sum_{\substack{\xi \in \mathfrak{o}_F \\ \eta\xi \equiv \square(4)}} c(\xi)q^\xi \right\}$$

によって定義する. ここで  $x \equiv \square(4)$  は  $x \equiv y^2 \pmod{4\mathfrak{o}_F}$  を満たす  $y \in \mathfrak{o}_F$  が存在することを意味するものとする.

$v$  を  $F$  の非アルキメデス的素点とする.  $\tilde{\mathcal{H}}_v = \tilde{\mathcal{H}}(\widetilde{\text{SL}_2(F_v)})/\Gamma_{0,v}(4); \varepsilon_v$  を次のように定義される Hecke 環とする.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(\widetilde{\text{SL}_2(F_v)})/\Gamma_{0,v}(4); \varepsilon_v = \{f \in \tilde{C}_0(\widetilde{\text{SL}_2(F_v)}) \mid f(k_1 h k_2) = \varepsilon_v(k_1) \varepsilon_v(k_2) f(h) \\ \forall k_1, k_2 \in \Gamma_{0,v}(4), \forall h \in \widetilde{\text{SL}_2(F_v)}\}. \end{aligned}$$

$\widetilde{\mathrm{SL}_2(F_v)}$  の Weil 表現を  $\omega_{\psi_v}$  とする.  $\omega_{\psi_v}$  の表現空間は Schwartz 空間  $\mathcal{S}(F_v)$  であり,  $\phi \in \mathcal{S}(F_v)$  に対して

$$\begin{aligned}\omega_{\psi_v} \left( \left[ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \zeta \right] \right) \phi(t) &= \zeta \frac{\alpha_{\psi_v}(1)}{\alpha_{\psi_v}(a)} |a|_v^{1/2} \phi(at) \\ \omega_{\psi_v} \left( \left[ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \zeta \right] \right) \phi(t) &= \zeta \psi_v(bt^2) \phi(t) \\ \omega_{\psi_v} \left( \left[ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \right] \right) \phi(t) &= \zeta |2|_v^{1/2} \overline{\alpha_{\psi_v}(1)} \hat{\phi}(-2t).\end{aligned}$$

が成り立つ. Weil 表現  $\omega_{\psi_v}$  は次の内積に関してユニタリ表現となる.

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{F_v} \phi_1(t) \overline{\phi_2(t)} dt, \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(F_v).$$

ここで  $dt$  は  $F_v$  の Haar 測度で  $\mathfrak{o}_v$  の体積が 1 となるものである.  $\phi_0$  を  $\mathfrak{o}_v$  の特性函数とする.

$$\Gamma_v = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathfrak{o}_v, b \in (4\mathcal{D}_v)^{-1}, c \in 4\mathcal{D}_v \right\}.$$

とおくとき, Hecke 環  $\tilde{\mathcal{H}}_v$  のベキ等元  $E_v^K$  を

$$E_v^K(g) = \begin{cases} |2|_v^{-1} (\phi_0, \omega_{\psi_v}(g) \phi_0) & \text{if } g \in \tilde{\Gamma}_v, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

によって定義する.

**定理 2:** 標準的な同型

$$i_v: \tilde{\mathcal{H}}_v \simeq \mathcal{H}_v^{E_v^K}$$

で移行を保存するものが存在する. すなわち  $\varphi_v \in \mathcal{H}_v$  とするとき  $\varphi_v$  は  $i_v(\varphi_v)$  の移行である.

大局 Hecke 環  $\tilde{\mathcal{H}}$  を  $\tilde{\mathcal{H}} = \otimes_{v<\infty} \tilde{\mathcal{H}}_v$  により定義すると,  $S_{k+(1/2)}(4)$  には大局 Hecke 環  $\tilde{\mathcal{H}}$  が右移動  $\rho$  により自然に作用する. ベキ等元  $E^K \in \tilde{\mathcal{H}}$  を  $E^K = \prod_{v<\infty} E_v^K$  により定義する.  $E^K$  はベキ等元なので  $\rho(E^K)$  は  $S_{k+(1/2)}(4)$  上の射影作用素となる.

**定理 3:**  $S_{k+(1/2)}^+(4)$  は射影作用素  $\rho(E^K): S_{k+(1/2)}(4) \rightarrow S_{k+(1/2)}(4)$  の像に等しい. すなわち,

$$S_{k+(1/2)}^+(4) = \{h \in S_{k+(1/2)}(4) \mid h = \rho(E^K)h\}.$$

が成り立つ.

$\tilde{\mathcal{H}}$  の部分環  $\tilde{\mathcal{H}}^{E^K}$  を

$$\tilde{\mathcal{H}}^{E^K} = E^K * \tilde{\mathcal{H}} * E^K = \prod_{v<\infty} \tilde{\mathcal{H}}_v^{E_v^K}$$

により定義する. このとき, 定理 3 により  $\tilde{\mathcal{H}}^{E^K}$  は  $S_{k+(1/2)}^+(4)$  に右移動  $\rho$  により作用する.

$S_{2k}$  を adèle 空間  $\mathrm{PGL}_2(F) \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}) / \prod_{v<\infty} \mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o}_v)$  上の保型形式  $\varphi$  で次の性質を満たすものとする.



(1)  $\varphi$  は重さ  $2k$  を持つ. すなわち  $k_i(\theta) = \iota_i \left( \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, d)$  とするとき,

$$\varphi(gk_i(\theta)) = \exp(2k_i\sqrt{-1}\theta)\varphi(g), \quad (g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}), \theta \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

(2)  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, d$ ) を  $i$  番目の無限成分に対応する Casimir 作用素とすると,

$$\Delta_i \varphi = -k_i(k_i - 1)\varphi$$

が成り立つ.

(3)  $\varphi$  は尖点的である. すなわち

$$\int_{x \in F \backslash \mathbb{A}} \varphi \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx = 0, \quad (g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$$

が成り立つ.

大局 Hecke 環  $\mathcal{H}$  を  $\mathcal{H} = \prod_{v < \infty} \mathcal{H}_v$  により定義すると  $\mathcal{H}$  は  $S_{2k}$  に右移動で作用する.

定理 2 により標準的な同型

$$i = \prod_{v < \infty} i_v : \mathcal{H} \simeq \tilde{\mathcal{H}}^{E^K}$$

が存在する.

定理 4:  $\varphi \in \mathcal{H}$ ,  $\tilde{\varphi} = i(\varphi) \in \tilde{\mathcal{H}}^{E^K}$  とするとき, Hecke 作用素の跡の等式

$$\mathrm{tr}(\varphi|_{S_{2k}}) = \mathrm{tr}(\tilde{\varphi}|_{S_{k+(1/2)}^+(4)})$$

が成り立つ. とくに同型  $i : \mathcal{H} \simeq \tilde{\mathcal{H}}^{E^K}$  により  $S_{k+(1/2)}^+(4)$  を  $\mathcal{H}$  加群とみると  $S_{2k}$  と  $S_{k+(1/2)}^+(4)$  は  $\mathcal{H}$  加群として同型である.

$F = \mathbb{Q}$  の場合には  $E^K$  は Hecke 作用素  $\mathbf{WU}$  の固有空間

$$\{h \in S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4)) \mid \mathbf{WU}h = (-1)^{(k^2+k)/2} 2^k h\}.$$

への射影作用素に一致する. したがって定理 3, 定理 4 は Kohnen の結果の Hilbert 保型形式への一般化と考えられる.

次に  $S_{k+(1/2)}^+(4)$  の Hecke 同時固有形式の Fourier 係数に関する結果を述べる.  $v$  を代数体  $F$  の非アルキメデス的素点とする.  $\xi \in F_v^\times$  に対して対称的な Laurent 多項式  $\Psi_v(\xi, X) \in \mathbb{C}[X + X^{-1}]$  を次のように定義する.  $\delta_1 = \mathrm{ord}_v(\xi)$  とし  $\delta_0$  を  $F_v(\sqrt{\xi})/F_v$  の導手の指数とする. このとき

$$\begin{aligned} f_\xi &= (\delta_1 - \delta_0)/2, \\ \chi_\xi &= \begin{cases} 1 & (\xi \in F_v^{\times 2} \text{ の場合}) \\ -1 & (F_v(\sqrt{\xi})/F_v \text{ が不分岐 2 次拡大の場合}) \\ 0 & (F_v(\sqrt{\xi})/F_v \text{ が分岐 2 次拡大の場合}) \end{cases} \end{aligned}$$

とおく. このとき,

$$\Psi_v(\xi, X) = \begin{cases} \frac{X^{f_\xi+1} - X^{-f_\xi-1}}{X - X^{-1}} - \chi_\xi q_v^{-1/2} \frac{X^{f_\xi} - X^{-f_\xi}}{X - X^{-1}} & (f_\xi \geq 0 \text{ の場合}) \\ 0 & (f_\xi < 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

と定義する. ここで  $q_v$  は  $v$  の剰余体の位数である.

**定理 5:**  $h(z) = \sum_{\eta \in \square(4)} c(\xi) q^\xi \in S_{k+(1/2)}^+(4)$  を Hecke 同時固有形式とする. 対応する  $S_{2k}$  の Hecke 同時固有形式を  $f(z)$  とする.  $f(z)$  の非アルキメデス的素点  $v$  における佐武 parameter を  $\alpha_v$  とする. このとき,  $\xi \in F^\times$  に対して  $h(z)$  の Fourier 係数  $c(\xi)$  は次のように表される.

$$c(\xi) = c_\xi \prod_{v < \infty} \Psi_v(\eta \xi, \alpha_v) \prod_{i=1}^d |\iota_i(\eta \xi)|^{(k_i/2) - (1/4)}$$

ここで  $c_\xi$  は  $\xi$  の  $F^\times/F^{\times 2}$  における類のみによって定まる定数である.

**例 1.**

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  とするとき,  $\dim_{\mathbb{C}} S_{(6,6)} = 1$  が知られている. よって  $\dim_{\mathbb{C}} S_{(7/2, 7/2)}^+(4) = 1$  となる.  $S_{(7/2, 7/2)}^+(4)$  は次のような元  $h(z)$  によって生成される.

$$\begin{aligned} h(z) = & q^{(5+\sqrt{5})/2} + q^{(5-\sqrt{5})/2} - 3q^3 + 2q^4 - 3q^{(9+3\sqrt{5})/2} - 3q^{(9-3\sqrt{5})/2} \\ & + q^{5+2\sqrt{5}} + q^{5-2\sqrt{5}} + 2q^{6+2\sqrt{5}} + 2q^{6-2\sqrt{5}} \\ & - q^{(13+\sqrt{5})/2} - q^{(13-\sqrt{5})/2} + 31q^7 - 44q^8 - q^{(17+5\sqrt{5})/2} \\ & - 11q^{(17+3\sqrt{5})/2} - 11q^{(17-3\sqrt{5})/2} - q^{(17-5\sqrt{5})/2} \\ & - 11q^{9+2\sqrt{5}} - 11q^{9-2\sqrt{5}} + 36q^{10+2\sqrt{5}} + 36q^{10-2\sqrt{5}} + \dots \end{aligned}$$

**例 2.**

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$  とするとき,  $\dim_{\mathbb{C}} S_{(4,4)} = 1$  が知られている. よって  $\dim_{\mathbb{C}} S_{(5/2, 5/2)}^+(4) = 1$  となる.  $S_{(5/2, 5/2)}^+(4)$  は次のような元  $h(z)$  によって生成される.

$$\begin{aligned} h(z) = & q - 4q^{(7+\sqrt{13})/2} - 4q^{(7-\sqrt{13})/2} + 3q^4 + 13q^5 \\ & + q^{(11+3\sqrt{13})/2} + q^{(11-3\sqrt{13})/2} - 26q^{(15+\sqrt{13})/2} \\ & - 26q^{(15-\sqrt{13})/2} + 39q^8 + 16q^9 - 4q^{(19+5\sqrt{13})/2} \\ & - 26q^{(19+3\sqrt{13})/2} - 26q^{(19-3\sqrt{13})/2} - 4q^{(19-5\sqrt{13})/2} \\ & + 13q^{10+2\sqrt{13}} + 13q^{10-2\sqrt{13}} + \dots \end{aligned}$$

## References

- [1] J. Adams, *Characters of covering groups of  $SL(n)$* , Journal of the Inst. of Math. Jussieu, **2** (2003), 1–21.
- [2] Y. Flicker, *Automorphic forms on covering groups of  $GL(2)$* , Inv. Math. **57** (1980), 119–182.

- [3] S. Gelbart, I. I. Piatetski-Shapiro, *Some Remarks on Metaplectic Cusp Forms and the Correspondence of Shimura and Waldspurger*, Israel J. Math. **44** (1983), 97–126.
- [4] W. Kohnen, *Modular forms of half-integral weight on  $\Gamma_0(4)$* , Math. Ann. **248** (1980), 249–266.
- [5] H. Kojima, *The trace formula for Hecke operators of Hilbert modular forms of rational weight* Japan J. Math. **20** (1994), 115–131.
- [6] H. Y. Loke and G. Savin, *Representations of the two-fold central extension of  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$* , Pacific J. Math. **247** (2010), 435–454.
- [7] J. Schultz, *Lifting of Characters on  $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F)$  and  $\mathrm{SO}_{1,2}(F)$  for  $F$  a non-archimedean local field*, dissertation, University of Maryland, 1998.
- [8] H. Shimizu, *On traces of Hecke operators*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **10** (1963), 1–19.
- [9] G. Shimura, *On modular forms of half integral weight*, Ann. Math. **97** (1973) 440–481.
- [10] A. Trehan, *Lifting of characters and functions on metaplectic groups*, Dissertation, University of Maryland, 2004.
- [11] J.-L. Waldspurger. *Correspondances de Shimura et quaternions*, Forum Math. **3** (1991), 219–307.
- [12] Wen-Wei Li, *Transfert d'intégrales orbitales pour le groupe métaplectique*, preprint. arXiv:0906.4053
- [13] Wen-Wei Li, *La formule des traces pour les revêtements de groupes réductifs connexes. I. Le développement géométrique fin*, preprint, arXiv:1004.4011
- [14] Wen-Wei Li, *Le lemme fondamental pondéré pour le groupe métaplectique*, preprint, arXiv:1006.4780